

MATHEMATIQUES 1991

C.E.S.T.I

- On désigne par L l'ensemble des applications f continues de R dans R telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f^2(x)\, dx < \infty$, e étant la base des logarithmes népériens (Ln(e)=1).

On admettra dans tout le problème que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

PREMIERE PARTIE

I-1 . n est un entier positif ou nul, calculer par récurrence les intégrales : $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n\ e^{-x^2}\ dx$

Quel que soit le nombre entier q montrer que tout polynôme $Q_q(x)$ de degré q appartient à L.

I-2 . Lorsque f et g sont deux éléments de L, majorer le produit $|f.g|$ et en déduire que L est un espace vectoriel. Montrer que H définie par :

$$H(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ f(x)\ g(x)\ dx$$

est une forme bilinéaire symétrique sur L.

I-3 . Après vous être assuré que H(f,f,) est un réel positif lorsque $f \in L$ vous posez $N(f) = \sqrt{H(f,f)}$. Montrez ensuite que pour deux éléments de L les 2 inégalités suivantes sont satisfaites

$$H(f,g) \leq N(f) \cdot N(g)$$
$$N(f+g) \leq N(f) + N(g)$$

L'application suivante : $f \in L \rightarrow N(f) \in R^+$ définit-elle une norme sur L ?

I-4 . Une fonction f périodique de période T, continue par morceaux appartient-elle à L ?

DEUXIEME PARTIE

Soit n un entier positif et y = f(x) une fonction indéfiniment dérivable sur R. On considère l'équation différentielle (E_n) suivante :

$$(E_n) : \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\ \frac{dy}{dx} + 2\,n\,y = 0$$

A SUIVRE

II-1 . Montrer que l'équation différentielle (E_n) admet parmi ses solutions des polynômes de degré n ayant même parité que n. On désigne par $P_n(x)$ celui des polynômes dont le monome de plus haut degré est $2^n x^n$. Calculer les coefficients de $P_n(x)$ et montrer que ces polynômes $P_n(x)$ ainsi définis sont uniques pour n fixé. Exprimer $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$.

II-2 On définit la fonction réelle ψ de la variable réelle x par la relation suivante

$$x \in \mathbf{R} \rightarrow \psi(x) = e^{-x^2} \in \mathbf{R}$$

Etablir une relation linéaire entre les dérivées d'ordre (n+2), (n+1) et n de ψ.

II-3 . n étant un entier fixé, vérifier que la fonction $y_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n \psi}{dx^n}$ est solution de l'équation différentielle E_n . En déduire que les polynômes $P_n(x)$ définis dans la question II-1 sont donnés par la relation :

$$P_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

II-4 . Quels que soient les deux entiers p et q calculer l'expression :

$$H(P_p , P_q)$$

Conclusion ? Préciser la valeur de $N^2(P_n)$ pour tout entier n positif.

II-5 . Montrer que P_n , P_{n+1} et P_{n+2} sont liés par une relation linéaire que l'on déterminera.

TROISIEME PARTIE

Pour tout entier n positif ou nul on introduit les quantités suivantes

$$\xi_n(f) = H(P_n, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} P_n(x) f(x)\, dx$$

$$\alpha_n(f) = \frac{\xi_n(f)}{N(P_n)} , \qquad \beta_n(f) = \frac{\alpha_n(f)}{N(P_n)}$$

attachés à chaque fonction f de L.

III-1 . Montrer que la relation :

$$\xi_n (f) = \xi_0 \left[\frac{d^n f}{dx^n} \right]$$

est satisfaite pour certaines fonctions f de L dont on précisera les propriétés.

III-2 . n étant un entier fixé et $a_0, a_1,...,a_n$ une suite de nombres réels, on considère la combinaison linéaire suivante :

$$f_n (x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k (x)$$

Pour toute fonction f donnée de L, calculer $N^2(f_n - f)$ et montrer que cette quantité passe par un minimum pour une suite de nombres $a_0, a_1,...,a_n$ que l'on déterminera. Etablir l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^2_k \leq N^2 (f)$$

et conclure quant à la convergence de la série de terme général α^2_k .

III-3 . Pour tout entier n positif ou nul on définit la fonction u_n par

$$u_n (x) = x^n$$

Exprimer $\xi_k (u_n)$ en fonction des intégrales I (première partie I-1) pour tout entier k positif ou nul. Donner la valeur des réels $\beta_k (u_n)$ pour tout entier k et tout entier n. Calculer les sommes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (u_2) P_k (x)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (u_3) P_k (x)$$

Conclusion ?

FIN